Divers | Chapitre 1 | Correction TD (D1)

Exercice n°1 • Vitesse d'une chute libre *cours*

1) On pose : $v \propto h^\alpha \cdot M^\beta \cdot g^\gamma$. On raisonne avec les USI (plus simples à manipuler que les dimensions).

$$\mathsf{m\cdot s^{-1}} = \mathsf{m}^\alpha \cdot \mathsf{kg}^\beta \cdot \left(\mathsf{m\cdot s^{-2}}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \mathsf{m} & \rightarrow & 1 = \alpha+\gamma \\ \mathsf{s} & \rightarrow & -1 = -2\gamma \\ \mathsf{kg} & \rightarrow & 0 = \beta \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1/2 \end{array}}$$

Ainsi : $\boxed{v \propto \sqrt{gh}}$. La vitesse au niveau du sol ne dépend pas de la masse de l'objet. Donc tous les objets tombent à la même vitesse (dans le cas où les frottements de l'air sont négligés).

2) On utilise la conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = cte \quad \Rightarrow \quad \underbrace{0 + mgh}_{\mathcal{E}_m(EI)} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + 0}_{\mathcal{E}_m(EF)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 9,9\ \mathsf{m{\cdot}s^{-1}}}$$

Exercice n°2 • Trajectoire circulaire ★☆☆

On pose : $a \propto R^\alpha \cdot M^\beta \cdot v^\gamma$. On raisonne avec les USI.

$$\mathsf{m\cdot s^{-2}} = \mathsf{m}^\alpha \cdot \mathsf{kg}^\beta \cdot \left(\mathsf{m\cdot s^{-1}}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \mathsf{m} & \rightarrow & 1 = \alpha+\gamma \\ \mathsf{s} & \rightarrow & -2 = -\gamma \\ \mathsf{kg} & \rightarrow & 0 = \beta \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 2 \end{array}}$$

Ainsi : $\boxed{a \propto v^2/R}$. L'accélération croît avec le carré de la vitesse et ne dépend pas de la masse.

Exercice n°3 • Rendement de la charge d'un condensateur ★⯪☆

On pose : $\eta \propto R^\alpha \cdot C^\beta \cdot E^\gamma$. On raisonne avec les USI. Un rendement n'a pas de dimension car c'est le rapport de deux énergies.

$$1 = \left(\mathsf{V\cdot A^{-1}}\right)^\alpha \cdot \left(\mathsf{A\cdot s\cdot V^{-1}}\right)^\beta \cdot \mathsf{V}^\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \mathsf{s} & \rightarrow & 0 = \beta \\ \mathsf{A} & \rightarrow & 0 = -\alpha+\beta \\ \mathsf{V} & \rightarrow & 0 = \alpha-\beta+\gamma \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}}$$

Ainsi : $\boxed{\eta \propto 1}$. Le rendement ne dépend pas du choix de R, C ou E. Il peut en revanche dépendre de la nature du circuit.

Exercice n°4 • Période d'un pendule ★★☆

1) On pose : $T \propto L^\alpha \cdot M^\beta \cdot g^\gamma$. On raisonne avec les USI.

$$\mathsf{s} = \mathsf{m}^\alpha \cdot \mathsf{kg}^\beta \cdot \left(\mathsf{m\cdot s^{-2}}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \mathsf{m} & \rightarrow & 0 = \alpha+\gamma \\ \mathsf{s} & \rightarrow & 1 = -2\gamma \\ \mathsf{kg} & \rightarrow & 0 = \beta \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -1/2 \end{array}}$$

Ainsi : $\boxed{T \propto \sqrt{L/g}}$. La période ne dépend pas de la masse de l'objet.

2) Un angle est une grandeur adimensionnée, il n'est donc pas possible de faire une analyse dimensionnelle avec... On en déduit que $\boxed{T = f(\theta_0) \cdot \sqrt{L/g}}$, où $f(\theta_0)$ est une fonction de la variable θ_0 que l'on ne peut pas déterminer par analyse dimensionnelle.

Exercice n°5 • Puissance d'une bombe nucléaire ★★★

1) Commençons par convertir les Joules (unité de l'énergie) dans les USI.

$$[\mathcal{E}] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \text{Masse} \cdot \text{Vitesse}^2 = \text{Masse} \cdot \text{Longueur}^2 \cdot \text{Temps}^{-2}$$

On pose : $\mathcal{E} \propto t^\alpha \cdot R^\beta \cdot \rho^\gamma$. On raisonne avec les USI.

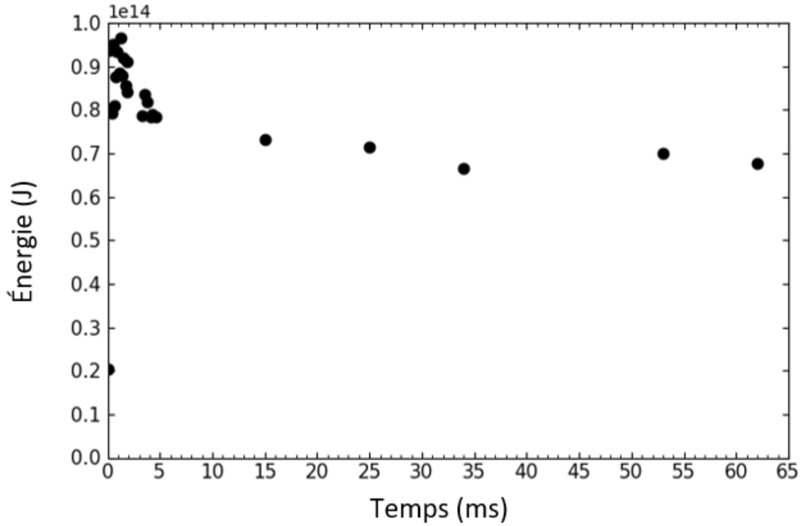
$$\mathsf{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}} = \mathsf{s}^\alpha \cdot \mathsf{m}^\beta \cdot \left(\mathsf{kg\cdot m^{-3}}\right)^\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \mathsf{kg} & \rightarrow & 1 = \gamma \\ \mathsf{m} & \rightarrow & 2 = \beta-3\gamma \\ \mathsf{s} & \rightarrow & -2 = \alpha \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 1 \end{array}}$$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{E} \propto \rho R^5/t^2}$.

2) On lit graphiquement $R = 107$ m (confirmé par le tableau de la question 3). On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E} \simeq \frac{\rho R^5}{t^2} = 7 \cdot 10^{13}\ \text{J}}$$

3) Une manière de répondre à la question, est de montrer que R^5/t^2 est constant. Sur le graphe ci-dessous, on trace $\rho R^5/t^2$ (ce qui est équivalent car ρ est constant) en fonction de t.



On constate que cette grandeur est globalement constante, ce qui valide les puissances choisies pour les paramètres t et R. On constate également que pour éviter une (légèrement) mauvaise estimation de $\mathcal{E}$, cette analyse doit être faite pour des temps $t > 10$ ms typiquement.